**Вопросы на экзамен**

**Функциональный анализ 1**

**Кафедра высшей математики. Институт кибернетики**

1. Множества. Операции над множествами. Бинарные отношения. Отношения частичного порядка, отношения эквивалентности. Фактормножества.
2. Бесконечные множества, их мощность. Счётные и несчётные множества, примеры и теоремы. Диагональный процесс нумерации. Счётность множества конечных последовательностей рациональных чисел. Континуум, его несчётность.
3. **Теорема Кантора для произвольного множества.**
4. **Теорема Кантора-Бернштейна.**
5. Полуметрические и метрические пространства. Подпространство метрического (полуметрического) пространства. Неотрицательность расстояния. Второе неравенство треугольника и неравенство многоугольника. Переход от полуметрического к метрическому пространству. Примеры.
6. Ограниченность метрического пространства и подпространства метрического пространства. Понятие ε-сети. Вполне ограниченные метрические пространства и подпространства. Понятие всюду плотного множества.
7. Предел последовательности элементов метрического пространства. Свойства сходящихся последовательностей. Непрерывность расстояния.
8. Понятие о внешней, внутренней и граничной точке множества. Открытые множества. Предельная точка множества и замкнутые множества. Замкнутость множества предельных точек. Замыкание множеств. Плотные множества. Сепарабельные и несепарабельные метрические пространства. Примеры.
9. Замкнутые и открытые множества, их конечные и счётные объединения и пересечения. Дополнения замкнутых и открытых множеств.
10. Фундаментальная последовательность. Полные и неполные метрические пространства и подпространства. Связь полноты и замкнутости. Примеры.
11. Отображения метрических пространств. Ограниченность оператора (функционала). Непрерывность отображения (оператора, функционала) на языке ε,δ и на языке последовательностей, их эквивалентность. Непрерывность расстояния.
12. Равномерная непрерывность отображения. Продолжение равномерно непрерывного оператора (функционала), заданного на плотном множестве.
13. Операторные уравнения. Обратные отображения (операторы). Корректные и некорректные задачи. Достаточное условие непрерывности обратного оператора.
14. Сжимающее отображение (сжатие). Теорема о неподвижной точке. Метод простой итерации и оценки погрешности приближений.
15. Применение принципа сжимающих отображений к трансцендентным уравнениям.
16. Применение принципа сжимающих отображений к системам линейных алгебраических уравнений.
17. Применение принципа сжимающих отображений к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.
18. Применение принципа сжимающих отображений для доказательства теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка (теоремы Пикара).
19. Изометрия метрических пространств. Непрерывность и ограниченность изометрических отображений. Идентичность метрических свойств (ограниченность, полнота, сходимость последовательностей) изометричных пространств. Пополнение неполных метрических пространств. **Теорема Хаусдорфа (единственность)**: изометричность всех пополнений неполного метрического пространства. Примеры.
20. Пополнение неполных метрических пространств. **Теорема Хаусдорфа (существование)**.
21. Предкомпактное и компактное метрическое пространство (подпространство). Примеры. Компактность конечного множества. Ограниченность предкомпактного множества. Предкомпактность ограниченного множества в En и Rnmax. Некомпактность единичного шара в l2.
22. Ограниченность непрерывного на компакте функционала.
23. Достижение верхней и нижней граней значений непрерывным на компакте функционалом.
24. Равномерная непрерывность непрерывного на компакте функционала.
25. Понятие ε-сети, полная непрерывность и критерий Хаусдорфа предкомпактности метрического пространства. Следствие из критерия (о предкомпактной ε-сети).
26. Равностепенная непрерывность множества функций. Достаточные условия равностепенной непрерывности. Достаточное условие отсутствия равностепенной непрерывности.
27. Предкомпактность множества функций в пространстве C[a,b] (теорема Арцела-Асколи). Необходимость.
28. Предкомпактность множества функций в пространстве C[a,b] (теорема Арцела-Асколи). Достаточность.
29. Определение и свойства линейного пространства. Линейное подмножество линейного пространства (линеал). Линейная оболочка множества элементов линейного пространства.
30. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства. Размерность линейного пространства. Изоморфизм линейных пространств одинаковой размерности. Бесконечномерные линейные пространства.
31. Линейные нормированные пространства (ЛНП). Метрика, порождённая нормой. Непрерывность нормы и операций сложения и умножения на число. Подчинённость и эквивалентность норм для ЛНП с одинаковыми носителями. Различные типы сходимости последовательностей непрерывных функций на отрезке. Полные (банаховы) и неполные ЛНП. Сепарабельные и несепарабельные ЛНП. Примеры.
32. Выпуклость подмножеств линейного пространства. Выпуклость произвольного шара в линейном нормированном пространстве (ЛНП). Выпуклость функционалов и неравенство Йенсена. Достаточное условие выпуклости функции одной переменной. Выпуклость функционала нормы в ЛНП.
33. Линейные отображения линейных пространств (операторы, функционалы), их области определения и области значений. Эквивалентность непрерывности линейного отображения линейного нормированного пространства (ЛНП) в одной точке и равномерной непрерывности во всём пространстве.
34. Ограниченные линейные отображения (операторы, функционалы) линейных нормированных пространств (ЛНП). Эквивалентность непрерывности и ограниченности линейного отображения ЛНП. Норма функционала и оператора, эквивалентность различных определений нормы. Оценка нормы оператора (функционала) через его значения на произвольном шаре.
35. Примеры ограниченных линейных операторов и функционалов и вычисления их норм. Примеры неограниченных линейных операторов и функционалов.
36. Непрерывность линейных отображений конечномерных линейных нормированных пространств (ЛНП). Изоморфизм конечномерных ЛНП одинаковой размерности. Полнота конечномерных ЛНП и замкнутость конечномерных подпространств. Покомпонентная сходимость последовательности элементов конечномерного ЛНП и сходимость по норме, их эквивалентность. Эквивалентность всех норм в конечномерном ЛНП.
37. Теорема Рисса о почти перпендикуляре. Модификация теоремы для случая конечномерного подпространства.
38. Связь конечномерности пространства и предкомпактности всех его ограниченных подмножеств.
39. Ряды в линейных нормированных пространствах. Сходимость ряда, его сумма. Необходимый признак сходимости. Критерий Коши сходимости рядов в банаховых пространствах. Обобщённый признак Вейерштрасса сходимости рядов в банаховых пространствах.
40. Метрические пространства RФ, их свойства. Пополнение неполных пространств RФ.
41. Линейное нормированное пространство Rnmax, его свойства.
42. Линейное нормированное пространство Rn1, его свойства.
43. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца для конечных последовательностей.
44. Линейное нормированное пространство Rn2=En, его свойства.
45. Неравенство Минковского для конечных последовательностей.
46. Линейные нормированные пространства Rnp, их свойства.
47. Линейное нормированное пространство c0, его свойства.
48. Линейное нормированное пространство c, его свойства.
49. Линейное нормированное пространство l∞, его свойства.
50. Линейное нормированное пространство l1, его свойства.
51. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца для бесконечных последовательностей.
52. Линейное нормированное пространство l2, его свойства.
53. Неравенство Минковского для бесконечных последовательностей.
54. Линейные нормированные пространства lp, их свойства.
55. Линейное нормированное пространство C[a,b], его свойства.
56. Линейные нормированные пространства Cm[a,b]= Dm[a,b], их свойства.
57. Линейное нормированное пространство CL1[a,b], его свойства.
58. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца для функций.
59. Линейное нормированное пространство CL2[a,b], его свойства.
60. Некоторые свойства интеграла Лебега. Пополнение пространств CL1[a,b] и CL2[a,b].

// было в другом файле :

Пояснение. В вопросах типа «Линейное нормированное пространство X, его свойства» подразумевается следующее:

1. Указать, какое линейное пространство является носителем ЛНП, т.е. какие у него элементы, как складываются и умножаются на числа, какой там нулевой элемент. Убедиться, что линейная комбинация элементов пространства является элементом пространства.
2. Указать размерность.
3. Указать, как определяется норма. При необходимости проверить корректность. Проверить выполнение аксиом ЛНП.
4. Указать, как определяется расстояние между элементами. Убедиться в выполнении аксиом метрического пространства.
5. Указать, что понимается под сходимостью последовательности в этом пространстве.
6. Проверить полноту/неполноту
7. Проверить сепарабельность / несепарабельность





1. Всякие дополнительные свойства приветствуются. Например, сравнение рассматриваемого пространства как множества с другими пространствами; сравнение сходимости в рассматриваемом пространстве с другими типами сходимости.